Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöt

Mikko Nummelin

2. joulukuuta 2021

Sisältö

1 Yleistä

Useimmat tietävät esimerkiksi kouluopetuksen perusteella, että toisen asteen polynomiyhtälöt on mahdollista ratkaista algebrallisesti neliöjuurilausekkeen avulla ja tämä kaava on ollut muodossa tai toisessa tunnettu jo antiikin Kreikassa. Myöhemmin kiinnostuttiin korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisemisesta samantapaisin keinoin ja Scipione del Ferro pystyi osoittamaan 3. asteen yhtälöiden olevan algebrallisesti ratkeavia ja Lodovico Ferrari myös 4. asteen yhtälöidenkin olevan algebrallisesti ratkeavia. Gerolamo Cardano julkaisi sittemmin nämä kaavat, vaikkei keksinyt niitä itse. Viidennen asteen yhtälöitä yritettiin ratkoa algebrallisesti pari vuosisataa tuloksetta, kunnes Niels Henrik Abel todisti, ettei tällaista algebrallista ratkaisua pelkkien yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskujen avulla ole olemassa. Sittemmin Evariste

Galois täydensi Abelin havaintoja ja kehitti myöhemmin nimeään kantavan Galois'n teorian, joka kertoo yksityiskohtaisesti, mitkä korkeamman asteen yhtälöt ovat algebrallisesti ratkeavia ja mitkä eivät. Tässä artikkelissa keskitytään 3. ja 4. asteen yhtälöiden ratkaisemiseen del Ferron, Ferrarin ja Cardanon kaavoin.

2 Polynomiyhtälön supistettu muoto

Mikä tahansa polynomiyhtälö, joka on tyyppiä

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

voidaan supistaa etukertoimella jakamalla muotoon

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n} = 0 \tag{1}$$

Vastaavasti näin supistettuun muotoon voidaan tehdä sijoitus

$$x = z - \frac{a_{n-1}}{a_n n}$$

jolloin saadaan polynomiyhtälö, josta puuttuu toiseksi korkein termi:

$$x^n + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0 = 0 \tag{2}$$

Jäljempänä voidaan tarvittaessa olettaa, että yhtälöt ovat muodossa 1 tai 2. Koska toiseksi korkein termi on polynomiyhtälön juurten summan vastaluku, muodossa 2 olevan yhtälön juurten summa on 0.

3 Toisen asteen yhtälöt

Kertauksen vuoksi käydään läpi, miten muodossa 1 olevan toisen asteen yhtälön

$$x^2 + ax + b = 0$$

ratkaisukaava voidaan johtaa. Sijoitetaan ensin $x = z - \frac{a}{2}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 + a\left(z - \frac{a}{2}\right) + b &= 0 \\
z^2 - az + \frac{a^2}{4} + az - \frac{a^2}{2} + b &= 0 \\
z^2 - \frac{a^2}{4} + b &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \frac{a^2}{4} - b \\
z &= \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \\
x &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \\
&= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.
\end{aligned}
$$

4 Kolmannen asteen yhtälöt

Tarkempaa tietoa tämän kappaleen asioista osoitteessa [1]. Tarkastellaan muodossa 1 olevaa kolmannen asteen yhtälöä

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

joka saadaan muotoon 2 sijoittamalla $x = z - \frac{a}{3}$. Tällöin saadaan yhtälö

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{3}$$

jossa

$$
\begin{cases}
p = -\frac{a^2}{3} + b \\
q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c
\end{cases}
$$

Yhtälössä 3 toiseksi korkeimman termin kerroin on 0, joten juurien z_1, z_2 ja z_3 summa on 0. Jos käytetään hyväksi kolmatta yksikönjuurta:

$$\omega = -\frac{1 + \sqrt{3}\hat{\imath}}{2}$$

voidaan osoittaa, että pätee mm.

$$
\begin{aligned}
\omega^3 &= 1 \\
\omega\overline{\omega} &= 1 \\
\omega + \overline{\omega} &= -1
\end{aligned}
$$

ja yhtälön 3 juuret voidaan kirjoittaa muuttujien u ja v symmetrisinä lausekkeina seuraavasti:

$$
\begin{cases}
z_1 = u + v \\
z_2 = \omega u + \overline{\omega} v \\
z_3 = \overline{\omega} u + \omega v
\end{cases} \tag{4}
$$

Laskemalla

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3-3uvz-u^3-v^3$$

saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} -\frac{p}{3} & = & uv \\ q & = & -u^3-v^3 \end{cases}$$

Toisaalta, koska

$$(z-u^3)(z-v^3)=z^2-(u^3+v^3)z+u^3v^3$$

voidaan päätellä, että u^3 ja v^3 ovat toisen asteen *resolventtiyhtälön*

$$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0 \tag{5}$$

juuret.

4.1 Vaihtoehtoinen tapa

Koska ei ole välttämättä ilmeistä, että kaikkien juurten muoto ilmenisi yhtälöryhmästä 4, voidaan olettaa aluksi vain, että $z=u+v$ ja laskea auki:

$$\begin{aligned} (u+v)^3+p(u+v)+q &= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q \\ &= (u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

joka toteutuu kun

$$\begin{cases} u^3+v^3+q & = & 0 \\ 3uv+p & =0 \end{cases}$$

Tämä johtaa samaan resolventtiyhtälöön 5 muuttujien u^3 ja v^3 osalta.

5 Neljännen asteen yhtälöt

Tarkempaa tietoa tämän kappaleen asioista osoitteessa [2]. Tarkastellaan supistetussa muodossa olevaa neljännen asteen yhtälöä

$$z^4+pz^2+qz+r=0$$

ja kirjoitetaan juuret kolmen muuttujan symmetrisinä lausekkeina seuraavasti:

$$\begin{cases} z_1 & = & u+v+w \\ z_2 & = & u-v-w \\ z_3 & = & -u+v-w \\ z_4 & = & -u-v+w \end{cases} \tag{6}$$

Tässä on siis valittu kahdeksasta mahdollisesta u:n, v:n ja w:n summien merkkiyhdistelmistä ne neljä, joissa $-$-merkkien määrä on parillinen. Juurien summa on 0, joten näiden avulla kehitetty 4. asteen yhtälö on supistetussa muodossa:

$$
\begin{aligned}
(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) &= \qquad (7)\\
z^4 - 2(u^2+v^2+w^2)z^2 - 8uvwz + \ldots & \qquad (8)\\
u^4+v^4+w^4-2(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) &= 0 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

eli

$$
\begin{cases}
p &= -2(u^2+v^2+w^2)\\
q &= -8uvw\\
r &= u^4+v^4+w^4-2(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)
\end{cases}
$$

Tarkastellaan sitten kolmannen asteen yhtälöä

$$
\begin{aligned}
(z-u^2)(z-v^2)(z-w^2) &= \\
z^3-(u^2+v^2+w^2)z^2+(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)z-u^2v^2w^2 &= 0
\end{aligned}
$$

jolloin havaitaan, että u^2, v^2 ja w^2 ovat kolmannen asteen *resolventtiyhtälön*

$$
t^3+\frac{p}{2}t^2+\left(\left(\frac{p}{4}\right)^2-\frac{r}{4}\right)t+\left(\frac{q}{8}\right)^2=0 \qquad (10)
$$

juuret.

5.1 Vaihtoehtoisia tapoja

5.1.1 Juurten symmetriset polynomit

Koska ei välttämättä ole ilmeistä, että kaikki neljännen asteen yhtälön juuret voitaisiin esittää muodossa 6 (jos asiaa ei etukäteen tiedä), on olemassa vaihtoehtoisia tapoja käsitellä neljännen asteen yhtälöitä. Eräs tapa on tutkia kolmannen asteen yhtälöä, jonka juuret ovat

$$
\begin{cases}
t_1 &= (z_1+z_2)(z_3+z_4)\\
t_2 &= (z_1+z_3)(z_2+z_4)\\
t_3 &= (z_1+z_4)(z_2+z_3)
\end{cases}
$$

ja jos nyt $\sum z_k = 0$, niin yhtälöryhmä saa muodon:

$$
\begin{cases}
t_1 &= -(z_1+z_2)^2\\
t_2 &= -(z_1+z_3)^2\\
t_3 &= -(z_2+z_3)^2
\end{cases}
$$

eli

$$\begin{cases} z_1 + z_2 &= \sqrt{-t_1} \\ z_1 + z_3 &= \sqrt{-t_2} \\ z_2 + z_3 &= \sqrt{-t_3} \end{cases}$$

jonka ratkaisu

$$\begin{cases} z_1 &= \frac{\sqrt{-t_1}+\sqrt{-t_2}-\sqrt{-t_3}}{2} \\ z_2 &= \frac{\sqrt{-t_1}-\sqrt{-t_2}+\sqrt{-t_3}}{2} \\ z_3 &= \frac{-\sqrt{-t_1}+\sqrt{-t_2}+\sqrt{-t_3}}{2} \end{cases}$$

kun huomioidaan lisäksi, että $z_4 = -(\sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2} + \sqrt{-t_3})/2$, on merkkejä ja kertoimia lukuunottamatta olennaisesti symmetrinen kaavojen 6 kanssa ja johtaa samaan kolmannen asteen resolventtiyhtälöön 10.

5.1.2 Neliöiksi täydentäminen

Seuraava tapa on todennäköisesti ollut lähellä Ferrarin alkuperäistä menetelmää neljännen asteen yhtälön ratkaisemiseksi ja perustuu siihen, että yhtälön molemmat puolet täydennetään neliöiksi. Koska $P^2 - Q^2 = (P+Q)(P-Q)$, saadaan yhtälölle $P^2 = Q^2$ ratkaisut yhtälöistä $P = \pm Q$. Lisätään termejä ja siirretään puolelta toiselle:

$$\begin{aligned} z^4 + pz^2 + qz + r &= 0 \\ z^4 + 2\kappa z^2 + \kappa^2 &= (2\kappa - p)z^2 - qz + \kappa^2 - r \\ \left(z^2 + \kappa\right)^2 &= (2\kappa - p)\left(z^2 - \frac{q}{2\kappa - p}z + \frac{\kappa^2 - r}{2\kappa - p}\right) \end{aligned}$$

Oikealla puolella oleva lauseke on neliö, mikäli

$$\begin{aligned} \frac{q}{2\kappa - p} &= 2\sqrt{\frac{\kappa^2 - r}{2\kappa - p}} \\ \frac{q^2}{(2\kappa - p)^2} &= \frac{4\kappa^2 - 4r}{2\kappa - p} \\ \frac{q^2}{2\kappa - p} &= 4\kappa^2 - 4r \\ (4\kappa^2 - 4r)(2\kappa - p) - q^2 &= 0 \end{aligned}$$

mikä on jälleen 3. asteen resolventtiyhtälö muuttujan κ suhteen.

5.1.3 Edellisten ratkaisutapojen välinen yhteys

Palataan kaavaan 7 ja määritellään:

$$\begin{aligned} E_1 &= (z - u - v - w)(z - u + v + w) \\ E_2 &= (z + u - v + w)(z + u + v - w) \end{aligned}$$

Ratkaistaan nyt P ja Q yhtälöparista:

$$\begin{cases} P+Q &= E_2 \\ P-Q &= E_1 \end{cases}$$

jolloin saadaan

$$\begin{cases} P &= z^2+u^2-v^2-w^2 \\ Q &= 2uz+2vw \end{cases}$$

Asettamalla nyt $\kappa = u^2 - v^2 - w^2$, $\lambda = 2u$ ja $\mu = 2vw$, voitaisiin neljännen asteen yhtälö kehittää neliöksi täydennettyyn muotoon

$$\left(z^2-\kappa\right)^2 - (\lambda z + \mu)^2 = 0$$

jolloin minkä tahansa muuttujan κ, λ tai μ ratkaiseminen yhtälöryhmistä johtaa 3. asteen resolventtiyhtälöön. Muuttujan λ kohdalla supistusten jälkeen samaan resolventtiyhtälöön kuin aiemmassa tapauksessa 10.

Viitteet

[1] Weisstein, Eric W. "Cubic Formula."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html

[2] Weisstein, Eric W. "Quartic Equation."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/QuarticEquation.html